ΑΣΚΗΣΗ 3.2 (Από το Βιβλίο του Λουκά)

Εάν $X_1,\dots,X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα (δηλ. οι $X_1,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ) από μια κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ τότε να βρεθούν:

i) η κατανομή $X_i-\bar{X}$, i: σταθ.

ii) η κατανομή του $n(\bar{X}-\mu)^2/\sigma^2$

iii) η μέση τιμή του S'^2 όπου $S'^2=\frac{1}{n}\cdot\sum(X_i-\bar{X})^2$

iv) η κατανομή του $\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$

ΛΥΣΗ

i) Θα πρέπει να βρούμε τα $E(X_i-\bar{X})$ και $Var(X_i-\bar{X})$

Πρώτα από όλα:

$$X_i-\bar{X} = X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j \overset{i\le j}{=} X_i - \frac{1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j =$$

$$= \frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j \quad (1)$$

• $$E(X_i-\bar{X}) \overset{(1)}{=} E\left(\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j\right) = \frac{n-1}{n}\cdot E(X_i) - \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\mu - \frac{1}{n}(n-1)\cdot\mu = 0$$

• $$Var(X_i-\bar{X}) \overset{(1)}{=} Var\left(\frac{n-1}{n}\cdot X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 Var(X_i) - \frac{1}{n^2}\cdot Var\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}X_j\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\sigma^2 - \frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Άρα, $X_i-\bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$

ii) $X_1^2 = N^2(0,1)$ ← εξ ορισμού

$$\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim N^2(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim N^2(0,1) = X_1^2$$

iii) $$\left.\begin{aligned} S'^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\ S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{aligned}\right| \quad \frac{S'^2}{S^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow \frac{S'^2}{S^2} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S'^2 = \frac{n-1}{n} S^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(S'^2) = \frac{n-1}{n} \cdot E(S^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(S'^2) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

iv) $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} N^2(0,1)$ ← εξ. ορισμού

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(x_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \dots + \frac{(x_n-\mu)^2}{\sigma^2} \sim N(0,1)^2 + \dots + N(0,1)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N^2(0,1) = \chi_n^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2(Βιβλίο Λουκά)

Για $X_1, X_2 \sim N(0,1)$

Να βρεθεί τις κατανομές των τ.μ:

i) $\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim ;$ ii) $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2} \sim ;$ iii) $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_2-X_1)^2}} \sim ;$

και iv) $\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim ;$

ΛΥΣΗ

i) $X_2 - X_1 \sim N(0-0, 1+1) = N(0,2)$

Προσοχή: οι διακυμάνσεις πάντα προστίθενται: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ (Εδώ n1=n2=1)

$\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N\left(0, \frac{2}{2}\right) = N(0,1)$

Προσοχή: όταν στη διακύμανση πολλ/ζουμε μια σταθερά, η σταθερά μπαίνει "έτσι" αλλά με τετράγωνο

ii) $X_1 + X_2 \sim N(0+0, 1+1) = N(0,2)$

$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim N^2(0,1) = X_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(X_1+X_2)^2}{2} \sim X_1^2 \quad (1)$

$\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim N^2(0,1) = X_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim X_1^2 \quad (2)$

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\leadsto}} \frac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2} \sim \frac{X_1^2/1}{X_2^2/1} = F_{1,1}$

iii) $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ και $\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim N^2(0,1) = X_1^2$

Άρα, $\frac{X_1+X_2/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_1-X_2)^2/2}} \sim t_1$

iv) $\frac{X_2^2/1}{X_1^2/1} \sim \frac{X_1^2}{X_1^2} = F_{1,1}$

ΑΣΚΗΣΗ

Το τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθεί κατανομή $N(0, 1)$. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $U = n\bar{X}^2$ έχει την $\mathscr{X}_1^2$ κατανομή. Επίσης να δειχθεί:

ότι η τ.μ. $V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ έχει την $\mathscr{X}_{n-1}^2$ κατανομή

Λύση

Το τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθεί κατανομή $N(0, 1)$ συνεπώς η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί κατανομή $N(0, n)$ και η τ.μ. $\bar{X} = \dfrac{\sum X_i}{n} \sim N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ ενώ η τ.μ. $\sqrt{n}\,\bar{X} \sim N(0, 1)$.

Έτσι τελικά η τ.μ. $(\sqrt{n}\,\bar{X})^2 = n\bar{X}^2$ ακολουθεί την $\mathscr{X}_1^2$ κατανομή.

Επειδή $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθούν την $N(0, 1)$, η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ακολουθεί την $\mathscr{X}_n^2$ κατανομή.

Όμως $\sum x_i^2 = \sum (x_i - \bar{x} + \bar{x})^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n\,\bar{x}^2$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 2.6 η τ.μ. $V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ακολουθεί την $\mathscr{X}_{n-1}^2$ κατανομή.

Σημείωση: Θα πρέπει να τονισθεί ότι $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ και ότι οι τ.μ. $\sum (X_i - \bar{X})^2$ και $\bar{X}^2$ είναι ανεξάρτητες.

Κανονική προσέγγιση στη Διωνυμική κατανομή:

Εφαρμογή

Απρόβλεπτη μη εντοπισμένη βλάβη μηχανής παραγωγής μικροαντιστάσεων, παράγει σε 5000 μονάδες το $\frac{1}{3}$ ελαττωματικές. Ποια η πιθανότητα ο μηχανικός ποιοτικού ελέγχου να βρει όχι περισσότερες από 3 ελαττωματικές μικροαντιστάσεις σε ένα δείγμα $\nu=25$;

ΛΥΣΗ

Έστω X τμ που παριστά τον αριθμό των ελαττωματικών στο δείγμα μεγέθους $\nu=25$ μικροαντιστάσεων και $p = P(\text{ελατ. αντίστασης}) = \frac{1}{3}$. Τότε, άμεσα έχουμε ότι:

$P(\text{όχι περισσότερες από 3 ελατ. αντιστάσεις}) =$

$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \{\text{Διωνυμική κατανομή}\}$

$$= \binom{25}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{25} + \binom{25}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{24} + \binom{25}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{23} + \binom{25}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{22}$$

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των επιμέρους πιθανοτήτων είναι χρονοβόρος και επίπονος.

Ωστόσο, παρατηρούμε ότι:

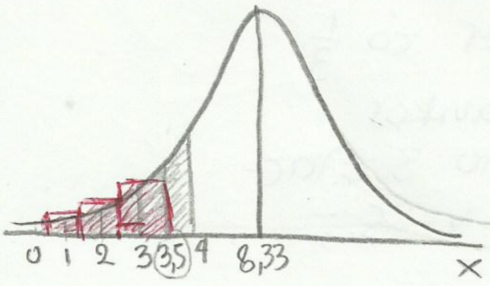
$$\nu\cdot p = 25\cdot\frac{1}{3} = 8{,}33 > 5 \quad \text{και} \quad \nu\cdot q = 25\cdot\frac{2}{3} = 16{,}66 > 5$$

Παρατήρηση:
Η κανονική κατανομή προσεγγίζει με ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας τη διωνυμική $B(\nu, p)$, όταν $(\nu p \text{ και } \nu q) > 5$.

Άρα, μας επιτρέπεται η χρήση κανονικής κατανομής ως προσέγγιση της διωνυμικής $B(25, \frac{1}{3})$

Άρα, η πιθανότητα $P(X \leq 3)$ θα βρεθεί με βάση τη

$$N(\nu p, \nu p \cdot q) \rightarrow N\left(25 \cdot \frac{1}{3}, 25 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \rightarrow N(8{,}33, 5{,}55)$$



Έτσι, έχουμε:

$$P(X \leq 3) = P(X < 3{,}5) =$$

$$= P\left(\frac{X - 8{,}33}{\sqrt{5{,}55}} < \frac{3{,}55 - 8{,}33}{\sqrt{5{,}55}}\right) =$$

$$= P(Z < -2{,}05) = 1 - 0{,}9798 =$$

$$= 0{,}0202.$$